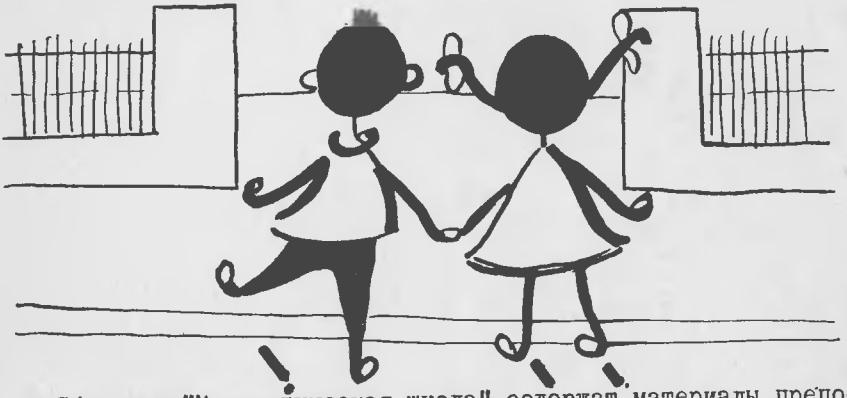
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

I

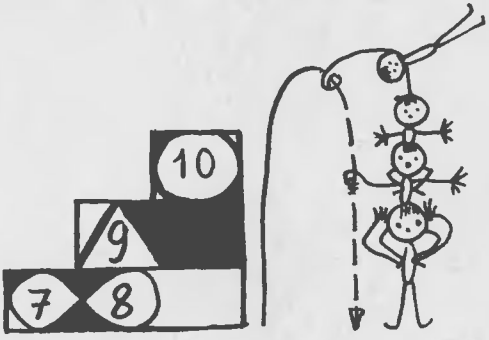
МОСКВА—1965

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА



Сборники "Математическая школа" содержат материалы преподавания математики в специализированных математических классах средней школы, материалы Вечерней математической школы при механико-математическом факультете Московского университета, а также другую информацию, представляющую интерес для учеников и преподавателей математических школ. Предлагаемый сборник - первый. Дальнейшие выпуски должны выходить каждые две недели.

Сборники подготовляются группой математиков Московского университета, работающих в математических классах школы № 2 Октябрьского района г.Москвы и в Вечерней математической школе.



Математические классы школы №2

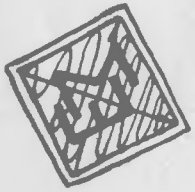
В школе имеются два лекционных потока по математике: поток 9-х классов (9а, 9б и 9в) и поток 10-х классов (10а, 10б и 10в). В каждом потоке лекции читаются два часа в неделю. Семинарские занятия проводятся пять часов в неделю. На семинарских занятиях каждый класс разбивается на две группы. Занятия с группой, состоящей из 15-18 учеников ведут руководитель группы и его помощники.

Кроме того математики из университета и других институтов ведут занятия в трех восьмых и двух седьмых классах. Разделение каждого класса на две группы проводится также в восьмых классах. Восьмиклассники занимаются в семинарах четыре часа в неделю. Семиклассники занимаются с университетскими преподавателями два часа в неделю. ~~Семиклассники занимаются с университетскими преподавателями два часа в неделю.~~

Во всех классах имеются и обычные уроки математики: в десятых и девятых по пять часов в неделю, в восьмых - шесть часов и в седьмых - восемь часов.

На стр. 42 приводится список преподавателей, ведущих занятия в классах и группах.

Из задач, предлагаемых всеми преподавателями, отбираются контрольные задачи. Для того, чтобы сдать зачет, ученик обязан уметь решать каждую задачу из контрольного списка. Списки контрольных задач будут помещаться в наших сборниках (см. стр. 22 и 36). Кроме обязательных задач школьникам предлагаются более трудные необязательные задачи. Часть их выносятся на конкурс. По окончании каждой темы жюри присуждает победителям премии. (См. конкурсные задачи на стр. 26 и 38).



Вечерняя математическая школа

Вечерняя математическая школа при механико-математическом факультете МГУ работает третий год. Школа рассчитана на ребят, проявляющих склонности к серьезным занятиям математикой. Задача школы не в том, чтобы сообщить ученикам определенный запас сведений, а в том, чтобы способствовать их общему математическому развитию и дать им почувствовать, что такое математика как наука.

Школа возникла как дальнейшее развитие системы математических кружков, которые работают при Московском университете уже свыше тридцати лет. По существу она представляет собой упорядоченный математический кружок.

Для учеников 8-ых и 9-II классов раз в неделю читаются лекции профессорами и преподавателями МГУ и других институтов. Это бывают иногда отдельные лекции, иногда небольшие циклы. После каждого цикла ученики могут сдавать зачеты.

Важнейшее место в работе школы занимают групповые занятия. Этими занятиями руководят аспиранты и студенты МГУ. В руководстве группами 7-х и 8-х классов принимают участие также наиболее сильные старшеклассники специализированных математических школ.

На групповых занятиях решаются разнообразные задачи. Часть этих задач связана с материалом лекций, другая часть имеет общий характер, Иногда задачи подбираются специально в связи с определенной темой занятия.

Проводится постоянный конкурс по решению задач. Задачи, предлагаемые на конкурс, будут печататься в каждом сборнике "Математическая школа" (первая серия задач помещена на стр. *6*).

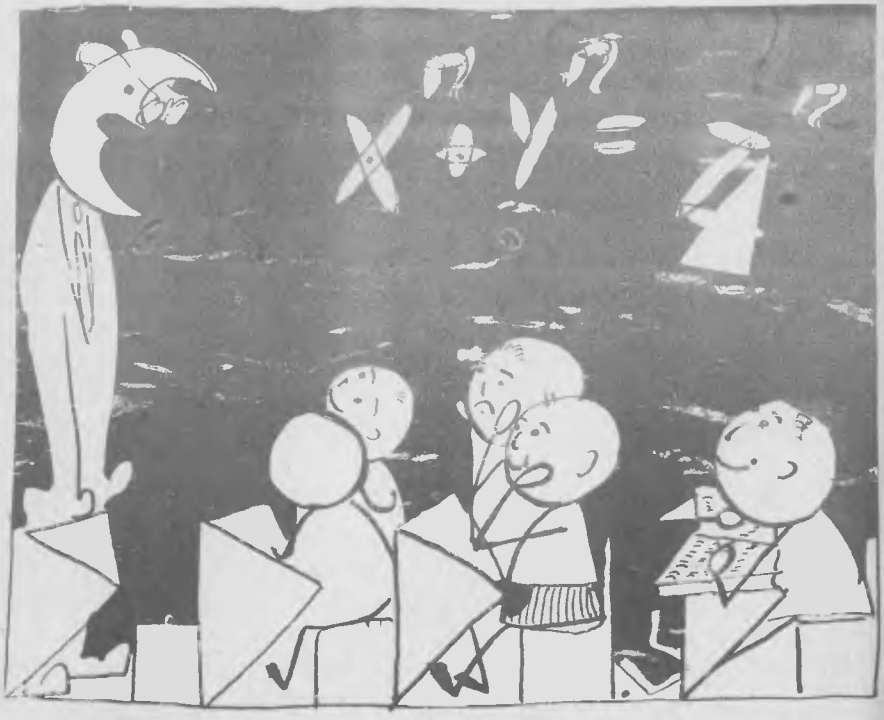
Школьники, приходящие в Вечернюю математическую школу, являются вначале ее гостями. Фамилии тех, кто хорошо решает задачи, вносятся затем в списки учеников, и им выдаются зачетные книжки. В зачетных книжках отмечаются сданные учениками зачеты и успехи в конкурсах по решению задач.

Занятия для 7-х классов происходят по субботам, с 16-ти до 19-ти час., начиная с 25 сентября 1965 г. в помещении шко-

лы № 2 (Ленинский проспект, д.58 а. Проезд автобусами №№ III, I08, II9,I44,57 до остановки "Ленинский проспект", троллейбусами 4 и 33 до остановки "Универмаг Москва").

Лекции для 8-х классов происходят по вторникам с I6 до I8 часов в аудитории 0.2 главного здания МГУ на Ленинских горах (проезд: метро "Университет", автобусы III, 57,47,II9, I33 до остановки "Дом культуры МГУ"). Групповые занятия для 8-х классов происходят в зданиях МГУ на Ленинских горах по вторникам с I8 до 20 час.

Лекции для 9-II классов читаются в ауд. 0.2 в главном здании МГУ на Ленинских горах по пятницам (начиная с I5 октября I965 г.) с I6-ти до I8-ти час. О расписании групповых занятий можно узнать во время лекций, а также на специальном стенде ВМШ возде ауд. 0.2 МГУ.



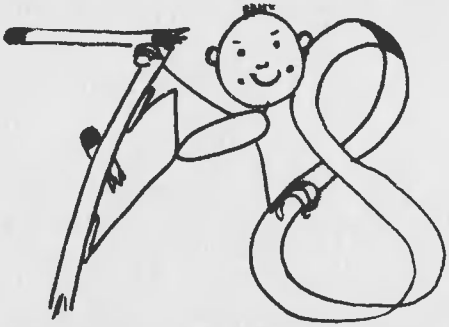
Конкурс вечерней математической школы

В конкурсе могут участвовать все школьники 7–II классов. Задачи даются отдельно для учеников 7–8-х и 9–II классов. Эти задачи сообщаются на групповых занятиях Вечерней математической школы, вывешиваются на специальных стендах ВМШ в главном здании МГУ (около ауд. О.2) и в школе № 2 и публикуются в сборниках "Математическая школа". Решения должны представляться в письменном виде в пределах объявленного для каждой серии задач срока. Их можно отдавать руководителям групп ВМШ, а также присылать по адресу: Москва В-234, Московский университет, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Вечерняя мат.школа, А.Маслову. Примерно, один раз в два месяца жюри подводит итоги конкурса и присуждает премии победителям.

Помимо основных серий задач мы будем публиковать иногда более трудные задачи, не указывая срока представления решений. Иногда это будут задачи, решение которых вообще никому неизвестно. Представленные в письменном виде хотя бы частичные решения таких задач будут, конечно, приниматься во внимание при присуждении премий.

После того, как срок представления решений истечет, мы будем печатать краткие решения наиболее интересных задач. Иногда будут публиковаться решения, представленные школьниками.

Итак, за работу, друзья!



8 класс.

(Решения принимаются до 19 октября)

1. Дано 20 целых, положительных, не равных между собой чисел, меньших 70. Доказать, что среди их разностей найдутся 4 одинаковых.
2. Бактерии имеют такой закон развития: каждая живет 1 час и каждые полчаса порождает одну новую (всего 2 за свою жизнь). Сколько бактерий будет через Т часов?
3. Имеется К ящиков. В некоторых из них лежат еще К ящиков. В некоторых из последних лежат еще ящики (снова К штук) и т.д. Сколько всего ящиков, если заполненных М?
4. На плоскости дано Р прямых, пересекающихся в Х точках. Каково должно быть Х, чтобы вопрос: "каково Р?" мог иметь только один ответ?
5. Дана последовательность: 1,1,2,3,7,22... Каждый член равен произведению предыдущих двух плюс 1. Доказать, что ни один член последовательности не делится на 4.
6. Из лампочек 4 цветов составляются гирлянды длиной в 4 лампочек каждая. В каждую гирлянду входят лампочки всех цветов, и ни в одной из них не стоят рядом лампочки одного цвета. Сколько можно составить таких гирлянд?
7. В выпуклом многоугольнике проведены некоторые диагонали так, что они попарно не пересекаются и разбивают многоугольник на треугольники. Доказать, что ~~ровно~~ х из двух вершин не исходит ни одна из проведенных диагоналей.
8. Плоскость разбита на три произвольные области А, В и С. Доказать, что хотя бы в одной из них найдется пара точек, расстояние между которыми равно 1.

х по меньшей мере

7 класс. (Решения принимаются до 15 октября)

1. Доказать, что в любой группе из 6 школьников всегда имеется либо трое школьников, которые все знакомы друг с другом, либо трое школьников, никакие два из которых не знакомы.
2. На плоскости даны 4000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что можно найти I 000 непересекающихся четырехугольников с вершинами в этих точках.
3. Имеется I0 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (весят I0 г), а в одном мешке все монеты фальшивые (весят II г). Одним взвешиванием с помощью ~~рычажных~~ весов[1] ~~и гирь~~ определить в каком мешке фальшивые монеты.
4. Пусть K -число делителей числа n.
   Доказать, что $K^2 < 4n$.
5. На продолжении наибольшей стороны в треугольнике $AC(\Delta ABC)$ отложен отрезок $CM=BC$.
   Доказать, что $\angle ABM$ тупой.
6. Дана дробь $\frac{2x+3}{5x+7}$. При каких целых x эта дробь сократима?
7. Дано 20 целых чисел (положительных) не равных между собой, меньших 70. Доказать, что среди их разностей найдутся 4 одинаковых.

9-10 классы

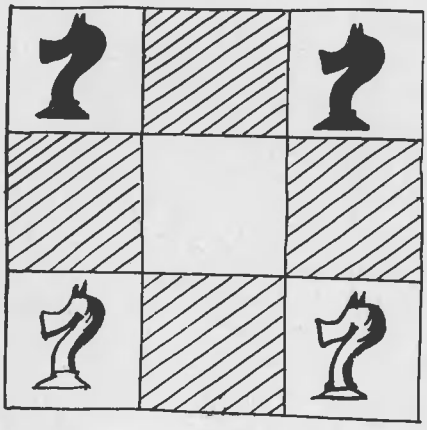
1. В клетки квадратной таблицы $n \times n$ записаны числа, причем известно, что сумма $2n-1$ чисел, составляющих произвольный крест (т.е. заполняющих некоторую строку и некоторый столбец) равна 0. Доказать, что все числа в таблице равны 0.
2. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Доказать, что произведение этих четырех чисел не может оканчиваться цифрами ...I965.

1) со стрелками без гирь

3. На круглом столе радиуса R расположено без наложений n круглых монет радиуса r, так что больше нельзя положить ни одной монеты. Доказать, что $\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right)<\sqrt{n}<\frac{R}{r}$

4. Доказать, что среди первых десяти миллионов разложения $\sqrt{2}$ ни одна цифра не повторится 500 раз.

5. Имеется шахматная доска 3x3, в верхних двух ее углах стоят два черных коня, в нижних – два белых. (Кони ходят как обычно). Доказать, что нужно сделать не менее 16 ходов, чтобы белых коней поставить на место черных, а черных на место белых.



1) цифр

ТРИ ЗАДАЧИ

И.М. Ягломъ

А. Дан прямоугольник R. Можно ли покрыть его двумя меньшими прямоугольниками, подобными R ?

Б. Дан выпуклый многоугольник M. Можно ли покрыть его тремя меньшими прямоугольниками, гомотетичными M ?

В. Дан прямоугольный параллелепипед P. Требуется покрыть его подобными, но меньшими прямоугольными параллелепипедами (т.е. такими, для которых отношения длина:ширина:высота имеют те же значения, что и для параллелепипеда P); при этом грани меньших параллелепипедов должны быть параллельны соответствующим граням P). Какое наименьшее число параллелепипедов при этом придется использовать?

Решение задач А–В должно содержать полный ответ типа (для задачи А): во всех случаях, кроме таких-то и таких-то прямоугольник R можно покрыть двумя ему подобными; в таких-то случаях для покрытия необходимо использовать три подобных прямоугольника (а быть может для некоторых прямоугольников наименьшее возможное число прямоугольников покрытия будет равно четырем или еще большему числу!). Различие между задачами А и Б заключается в том, что в первой из них многоугольники покрытия лишь подобны исходному, в то время, как во второй они ему гомотетичны, т.е. "подобны и подобно расположены" (другими словами стороны меньших многоугольников должны быть параллельны соответствующим сторонам многоугольника M). Таким образом задача А допускает гораздо больше вариантов расположения многоугольников покрытия; зато выбор покрываемой фигуры здесь значительно более бедный: в то время как многоугольник M задачи Б может быть любым , в задаче А нас интересует лишь вопрос о покрытии прямоугольников. Заменив в задаче А прямоугольник произвольным (выпуклым) многоугольником M мы придем к вопросу о наименьшем возможном числе подобных M многоугольяиков, которыми можно покрыть M – однако ответ на этот вопрос пока не известен и можно предпола-

гать, что найти его вовсе не легко (во всяком случае это заведомо сложнее, чем решить задачу Б, являющуюся самой трудной из трех предложенных; заметим, что решение этой задачи впервые было получено лишь в 1960 г. известными советскими математиками И.П.Гохбергом и А.С.Маркусом).

В задаче В речь идет о покрытии параллелепипеда P многогранниками, подобными P и "подобно расположенными" (т.е. такими, что грани их параллельны соответствующим граням P) - в этом смысле поставленный здесь вопрос можно считать родственным тому, который составляет содержание задачи Б. Однако в этой задаче речь идет не о произвольном (выпуклом) многограннике G, а лишь о прямоугольном параллелепипеде P - и в этом отношении задача В скорее сходна с задачей А. Причиной этого является то, что на вопрос о наименьшем числе подобных и "подобно расположенных" меньших многогранников, достаточном для того, чтобы этими "меньшими" многогранниками можно было полностью покрыть заданный выпуклый многогранник G, для произвольных многогранников пока еще не получено ответа - и это несмотря на то, что сформулированный вопрос, тесно связанный с некоторыми глубокими и давно стоящими геометрическими проблемами[x], привлекал внимание ряда известных математиков.

---

x) В первую очередь здесь имеется в виду так называемая проблема Борсука (К.Борсук - известный польский математик) состоящая в следующем: каково наименьшее число частей, на которые надо разбить данную фигуру F, если требовать, чтобы диаметр каждой части был меньше диаметра всей фигуры? (Под диаметром здесь понимается наибольшее расстояние между точками фигуры). Эта проблема оказалась сравнительно несложной в случае плоскости; она была лишь недавно и после очень больших усилий решена для обычного (трехмерного)пространства; что же касается случая, скажем, четырехмерного пространства, то здесь проблема Борсука пока успешно сопротивляется всем попыткам математиков справиться с ней.

Е.Б. ДЫНКИН

Лекционный курс математики в десятых классах школы №2

Тема первая. Метрика Евклида в n-мерном векторном пространстве.[x)]

§ I. Постановка задач.

В геометрическом трехмерном пространстве определены расстояние между двумя точками и угол между двумя лучами, выходящими из одной точки. На основе этих понятий определяются более сложные понятия: расстояния между точкой и прямой, между точкой и плоскостью, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью и т.п.; углы между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями. Все это - метрические понятия.

Преобразования пространства, сохраняющие расстояния и углы, называются движениями. Два множества называются конгруентными, если существует движение, переводящее первое из этих множеств во второе.

Когда конгруентны два отрезка; две пары лучей, выходящих из одной точки; две пары прямых; две пары "плоскость-прямая"; две пары плоскостей? Теория, которой мы будем заниматься, позволит решать аналогичные вопросы и в n-мерном пространстве

x) Эта тема тесно примыкает к значительной теме "Размерность векторных пространств", рассмотренной в курсе 9 класса. Ученики уже знакомы с аксиоматическим определением векторного пространства, с основными примерами векторных пространств (геометрическая плоскость и геометрическое пространство; -мерное арифметическое пространство, пространство многочленов, пространство непрерывных функций), а также с понятиями подпространства, базиса и координат, линейной зависимости и независимости, линейной оболочки. Кроме того, изучались общие линейные многообразия в векторных пространствах (множества, которые получаются из подпространств с помощью параллельных переносов) и было рассказано о двух способах заданий таких многообразий: с помощью системы линейных уравнений и с помощью параметрического представления. (См. Е.Б. Дынкин "Лекционный курс математического анализа и линейной алгебры в девятых классах математической школы № 2. Изд. МГУ, 1965).

Удобно начинать с понятия скалярного произведения, и через него определять расстояния и углы.

§ 2. Определение скалярного произведения. Примеры скалярного произведения.

Говорят, что в векторном пространстве V задано скалярное произведение, если каждым двум векторам f, g сопоставлено число (обозначаемое через (f,g), причем:

1) $(f,g)=(g,f)$;
2) если c любое число, то $(cf,g)=c(f,g)$;
3) $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$;
4) $(f,f)>0$, если $f\neq 0$.

§ 3. Длина вектора. Угол между векторами.

Длина вектора f определяется формулой $|f|=\sqrt{(f,f)}$

Угол между ненулевыми векторами f и g определяется формулой

$$<f,g>=\arccos\frac{(f,g)}{|f||g|}.$$

Корректность последнего определения вытекает из неравенства Шварца-Коши-Буняковского $|(f,g)|\leq|f||g|$.

Когда угол между векторами равен 0 или 180^0? Как может измениться угол от умножения векторов на числа?

Векторы f и g называются ортогональными, если $(f,g)=0$

Ортогональным дополнением к множеству векторов E называется совокупность всех вектором f, ортогональных к каждому вектору $g\in E$. Ортогональное дополнение всегда является подпространством.

§ 4. Матрица Грама. Конгруентные базисы.

Матрицей Грама системы векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ называется квадратная таблица

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix},$$

где $g_{ij}=(f_i,f_j)$. Скалярное произведение выражается через координаты векторов по базису $e_1, \ldots, e_n$ и матрицу Грама этого базиса формулой

$$(f,g)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}a_i b_j.$$

Взаимно однозначное отображение A векторного пространства V на себя называется ортогональным преобразованием, если:

а) $A(f+g)=A(f)+A(g)$ для любых $f,g\in V$;

б) $A(cf)=cA(f)$ для любого $f\in V$ и любого числа c;

в) $(A(f),A(g))=(f,g)$ для любых $f,g\in V$.

Два множества в пространстве V называются конгруентными, если они переводятся одно в другое некоторым ортогональным преобразованием пространства V.

Теорема. Если два базиса $e_1,e_2,\dots,e_n$ и $e_1',e_2',\dots,e_n'$ имеют одинаковые матрицы Грама, то они конгруентны (т.е. существует ортогональное преобразование A, такое, что $A(e_i)=e_i'$).

Отображение A определяется формулой

$$A(a_1e_1+\dots+a_ne_n)=a_1e_1'+\dots+a_ne_n'.$$

§ 5. Ортонормированные системы векторов.

Определение ортогональной и ортонормированной систем. Вид соответствующих матриц Грама. Лемма о линейной независимости ортонормированной системы.

Система векторов называется полной, если не существует отличного от нуля вектора, ортогонального ко всем векторам системы.

Теорема. Всякая полная ортонормированная система $e_1,\dots,e_n$ является базисом. Для любого вектора f

$$f=(f,e_1)e_1+\dots+(f,e_n)e_n.$$

Следствия. I. Всякую ортонормированную систему можно дополнить до ортонормированного базиса.

2. Во всяком евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

§ 6. Изоморфизм всех n-мерных евклидовых пространств.

§ 7. Приложима ли общая теория евклидовых пространств в элементарной геометрии?

Да, приложима, поскольку геометрическое скалярное произведение удовлетворяет общим аксиомам § 2. Однако, раньше, чем применять общую теорию к геометрическому случаю, надо проверить аксиомы, не опираясь на эту теорию!

§ 8. Применение элементарной геометрии к общей теории евклидовых пространств.

Если векторы $f_1, \dots, f_k$ в произвольном евклидовом пространстве лежат в некотором двумерном (трехмерном) подпространстве, то при изучении этих векторов можно пользоваться элементарной планиметрией (стереометрией).

Примеры.

1) Новое доказательство неравенства Коши-Буняковского.

2) Если $f_1+f_2+f_3=0$, то $\langle f_1, f_2\rangle+\langle f_2, f_3\rangle+\langle f_3, f_1\rangle=2\pi$.

§ 9. Проектирование на подпространство.

Говорят, что вектор f ортогонален к подпространству $\tilde{V}$ и пишут $f\perp\tilde{V}$, если $(f,g)=0$ для всех $g\in\tilde{V}$. Если вектор ортогонален к некоторому базису $\tilde{V}$, то он ортогонален к $\tilde{V}$.

Говорят, что вектор $\tilde{f}$ – проекция вектора f на подпространство $\tilde{V}$, если: а) $\tilde{f}\in\tilde{V}$; б) $f-\tilde{f}\perp\tilde{V}$.

Теорема. Для каждого вектора f существует и притом единственная проекция f на $\tilde{V}$. Если $e_1,\dots,e_k$ – ортонормированный базис в $\tilde{V}$, то проекцией f на $\tilde{V}$ является вектор

$$\tilde{f}=(f,e_1)e_1+\dots+(f,e_k)e_k.$$

§ 10. Ортогонализация базиса.

По базису $f_1, f_2, \dots, f_n$ строится ортонормированный базис $e_1,\dots,e_n$ с использованием двух приемов: нормирования и проектирования

Нормирование	Проектирование
$e_1=\frac{f_1}{\lvert f_1\rvert}$	$e_2'=f_2-(f_2,f_1)e_1$
$e_2=\frac{e_2'}{\lvert e_2'\rvert}$	$e_3'=f_3-(f_3,e_1)e_1-(f_3,e_2)e_2$
$e_3=\frac{e_3'}{\lvert e_3'\rvert}$	$e_4'=f_4-(f_4,e_1)e_1-(f_4,e_2)e_2-(f_4,e_3)e_3$

и т.д.

Замечания: а) f_k линейно выражается через $e_1,\dots,e_k$;

б) если $f_1,\dots,f_i$ – ортонормированная система, то $e_1=f_1,\dots,e_i=f_i$;

§ 11. Расстояние между точками и между множествами.

Векторы и соответствующие им точки обозначаются одинаковыми буквами. Расстояние между точками x и y: $\rho(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$

или через координаты векторов x и y по некоторому базису и матрицу Грама этого базиса

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i,j}^{n} g_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)}.$$

В частности, для ортогонального базиса

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Расстояние от точки x до множества M

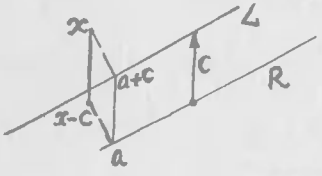
$$\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\rho(x,y).$$

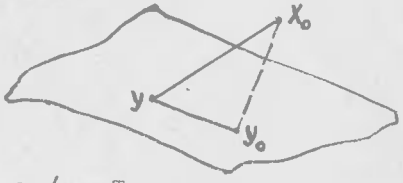
Расстояние между множествами M и N

$$\rho(M,N)=\inf_{x\in M,\,y\in N}\rho(x,y).$$

§ I2. Расстояние от точки до линейного многообразия.

Пусть $L=R+c$ (R –подпространство, c – фиксированный вектор). Говорят, что вектор f ортогонален L, если f ортогонален R. Это равносильно требованию: для любых x и y из L $(f,x-y)=0$ Точка $\tilde{x}$ называется проекцией точки x на линейное многообразие L , если: а) $\tilde{x}\in L$, б) вектор $x-\tilde{x}$ ортогонален L. Доказать самостоятельно, что если $L=R+c$, то проекция x на L равна $a+c$, где a – проекция $x-c$ на R.





Теорема. Пусть y_0 – проекция x_0 на L . Тогда $\rho(x_0,y)>\rho(x_0,y_0)$, если $y\in L$ и $y\neq y_0$.

Доказательство. Имеем $x_0-y=f+g$, где $f=x_0-y_0$, $g=y_0-y$ Очевидно $(f,g)=0$. Поэтому $|x_0-y|^2=|f|^2+|g|^2>|f|^2=|x_0-y_0|^2$

Следствие. Для того, чтобы $\rho(x_0,L)=\rho(x_0,y)$ $(y\in L)$, необходимо и достаточно, чтобы x_0-y было ортогонально L .

§ I3. Расстояние между двумя линейными многообразиями

Теорема. Пусть L и M – два линейных многообразия. Для того, чтобы $\rho(L,M)=\rho(x_0,y_0)$, где $x_0\in L$, $y_0\in M$, необходимо и достаточно, чтобы вектор $f=x_0-y_0$ был ортогонален к L и M.

Необходимость сразу вытекает из следствия, выведенного в конце § I2. Доказательство достаточности. Если $x\in L$, $y\in M$, то $x-y=f+g$, где $g=y_0-x_0+x-y$. По условию $(f,x-x_0)=(f,y-y_0)=0$

Поэтому $|x-y|^2=|x_0-y_0|^2+|g|^2\geq|x_0-y_0|^2$

Замечание. Из последней формулы видно, что равенство $\rho(x,y)=\rho(x_0,y_0)=\rho(L,M)$ имеет место тогда и только тогда, когда $g=0$, т.е. $x_0-y_0=x-y$. На более наглядном языке: любые два общих перпендикуляра к L и M определяют равные векторы.

Доказанная теорема оставляет открытым вопрос о существовании точек $x_0\in L$, $y_0\in M$, для которых $\rho(x_0,y_0)=\rho(L,M)$. В действительности, такие точки всегда существуют (см. конкурсную задачу № 3).

§ 14. Конгруентные системы векторов.

Теорема. Если две системы векторов $e_1,\dots,e_k$ и $f_1,\dots,f_k$ имеют одинаковые матрицы Грама (т.е. если $(e_i,e_j)=(f_i,f_j)$ при $i,j=1,2,\dots,k$), то эти системы конгруентны.

Доказательство разбивается на следующие шаги.

1^0. Если $c_1e_1+\dots+c_ke_k=0$, то $c_1f_1+\dots+c_kf_k=0$.

2^0. Если система $e_1,\dots,e_k$ линейно зависима (линейно независима), то система $f_1,\dots,f_k$ также линейно зависима (линейно независима).

3^0. Системы $e_1,\dots,e_k$ и $f_1,\dots,f_k$ можно расширить до систем $e_1,\dots,e_k,\dots,e_s$ и $f_1,\dots,f_k,\dots,f_s$ так, чтобы расширенные системы имели одинаковые матрицы Грама и хотя бы одна из них порождала все векторное пространство.

4^0. Если система $e_1,\dots,e_s$ порождает все пространство, то из этой системы можно вычеркнуть часть векторов так, чтобы оставшиеся векторы $e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n}$ образовывали базис. В силу 2^0 векторы $f_{i_1},f_{i_2},\dots,f_{i_n}$ также образуют базис. По теореме § 4 эти базисы конгруентны. Если A – ортогональное преобразование, переводящее e_{i_m} в f_{i_m}, то в силу 1^0 $F(e_j)=f_j$ для всех $j=1,2,\dots,s$.

§ 15. Характеристика множества векторов.

Характеристикой (или полной системой инвариантов) множества векторов E мы называем всякий набор чисел, определяющий множество E с точностью до конгруентности. Согласно § 14 матрица Грама системы векторов $f_1,\dots,f_k$ является характеристикой этой системы. Другой характеристикой является набор длин $|f_1|,\dots,|f_k|$ и углов $\langle f_i,f_j\rangle$ $(1\leq i\leq j\leq k)$.

Размерность подпространства является характеристикой подпространства (ибо любые две ортонормированные системы, состоящие из одинакового числа векторов, конгруентны).

§ I6. Угол между вектором и подпространством.

Угол между ненулевым вектором f и ненулевым подпространством P определяется формулой $\langle f, P\rangle = \inf \langle f, g\rangle$ по всем ненулевым векторам $g \in P$.

Всегда $0 \le \langle f, P\rangle \le \frac{\pi}{2}$, причем $\langle f, P\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $f \in P$ и $\langle f, P\rangle = \frac{\pi}{2}$ тогда и только тогда, когда f ортогонален P.

Теорема. Пусть $\tilde{f}$ – проекция f на P. Для того, чтобы $\langle f, P\rangle = \langle f, g\rangle$, где $g \in P$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{f} = kg$, где $k \ge 0$.

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\tilde{f} = 0$. Предположим, что $|\tilde{f}| = c > 0$ и пусть g – произвольный ненулевой вектор из P. Положим $g' = \frac{g}{|g|} c$. Очевидно, $|g' - f|^2 - |\tilde{f} - f|^2 = 2c|f|\{\cos\langle \tilde{f}, f\rangle - \cos\langle g', f\rangle\} = 2c|f|\{\cos\langle \tilde{f}, f\rangle - \cos\langle g, f\rangle\}$ и по теореме §I2 эта разность неотрицательна и обращается в нуль только тогда, когда $g' = \tilde{f}$ и, следовательно, $\tilde{f} = \frac{c}{|g|} g$.

Следствие I. $\rho(f, P) = |f| \sin\langle f, P\rangle$.

Следствие 2. Если $f \ne 0$ и $|f_n - f| \to 0$, то $\langle f_n P\rangle \to \langle f, P\rangle$.

§ I7. Минимальный угол между двумя подпространствами

Минимальный угол $\langle P, Q\rangle$ между подпространствами P и Q определяется формулой $\langle P, Q\rangle = \inf \langle f, g\rangle$ по всем ненулевым векторам $f \in P$, $g \in Q$.

Заметим, что $\langle P, Q\rangle = \inf \langle f, g\rangle$ по всем единичным векторам $f \in P$, $g \in Q$, а также $\langle P, Q\rangle = \inf \langle f, Q\rangle$ по всем единичным векторам $f \in P$.

Теорема. Найдутся единичные векторы $f_1 \in P$, $g_1 \in Q$, такие, что $\langle P, Q\rangle = \langle f_1, Q\rangle = \langle P, g_1\rangle = \langle f_1, g_1\rangle$. Проекция f_1 на Q пропорциональна g_1, а проекция g_1 на P пропорциональна f_1.

Доказательство. Множество всех единичных векторов подпространства P замкнуто и ограничено (доказать это самим!). Функция $\langle f, Q\rangle$ непрерывна на этом множестве (следствие 2 § I6). Поэтому она достигает своего наименьшего значения в некото-

рой точке f_1. Имеем $\langle P,Q\rangle=\langle f_1,Q\rangle$. Выберем единичный вектор $g_1\in Q$, так, чтобы $\widetilde{f_1}=kg_1$. ($\widetilde{f_1}$ – проекция f_1 на Q, $k\geq 0$). По теореме § I6 $\langle f_1,Q\rangle=\langle f_1,g_1\rangle$. Значит, $\langle P,Q\rangle=\langle f_1,g_1\rangle$. Поскольку $\langle P,Q\rangle\leq\langle P,g_1\rangle\leq\langle f_1,g_1\rangle$ то $\langle P,g_1\rangle=\langle f_1,g_1\rangle$. По теореме § I6 проекция g_1 на P пропорциональна f_1.

§ I8. База и характеристика пары подпространств.

Пусть P и Q – два подпространства. Пусть $\dim P=k$, $\dim Q=k+r\ (r\geq 0)$. Согласно § I7 найдутся единичные векторы $f_1\in P$, $g_1\in Q$, такие, что $\langle P,Q\rangle=\langle f_1,g_1\rangle$. Пусть P_2 – ортогональное дополнение f_1 в P и Q_2 – ортогональное дополнение g_1 в Q. Согласно § I7 найдутся единичные векторы $f_2\in P_2$, $g_2\in Q_2$, такие, что $\langle P_2,Q_2\rangle=\langle f_2,g_2\rangle$. При этом f_2 ортогонален к f_1 следовательно, ортогонален к проекции вектора g_1 на P, следовательно, ортогонален к g_1 (задача №20). Аналогично, g_2 ортогонален к g_1 и f_1. Рассмотрим ортогональное дополнение P_3 вектора f_2 в P_2 и ортогональное дополнение Q_3 вектора g_2 в Q_2 и выберем единичные векторы $f_3\in P_3$ и $g_3\in Q_3$ так, чтобы $\langle P_3,Q_3\rangle=\langle f_3,g_3\rangle$ и т.д. Продолжая этот процесс, построим ортонормированные системы векторов $f_1,f_2,\dots,f_k$ в P и $g_1,g_2,\dots,g_k$ в Q. Дополним векторы $g_1,g_2,\dots,g_k$ до ортонормированного базиса $g_1,g_2,\dots,g_k,\dots,g_{k+r}$ пространства Q. Систему векторов

$$f_1,g_1;\ f_2,g_2;\ \dots;\ f_k,g_k;\ g_{k+1},\dots,g_{k+r}\qquad(*)$$

назовем базой пары подпространств P, Q. Длины всех этих векторов равны I, а все попарные углы – прямые за исключением углов $\varphi_1=\langle f_1,g_1\rangle$, $\varphi_2=\langle f_2,g_2\rangle$, …, $\varphi_k=\langle f_k,g_k\rangle$
Из построения базы видно, что $0\leq\varphi_1\leq\varphi_2\leq\dots\leq\varphi_k\leq\frac{\pi}{2}$. В силу § I4 набор чисел $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ и $r=\dim Q-\dim P$ является характеристикой системы векторов (*) и, следовательно, является характеристикой пары подпространств P, Q. Число φ_i мы будем называть i-ым углом между P и Q и будем обозначать $\langle P,Q\rangle_i$. В частности, $\varphi_1=\langle P,Q\rangle_1=\langle P,Q\rangle$ – минимальный угол, $\varphi_k=\langle P,Q\rangle_k$ – максимальный угол.

Заметим, что если $f=a_1f_1+\dots+a_kf_k$ и $g=b_1g_1+\dots+b_{k+r}g_{k+r}$ то $(f,g)=a_1b_1\cos\varphi_1+a_2b_2\cos\varphi_2+\dots+a_kb_k\cos\varphi_k$
Вектор $\widetilde{f}=a_1\cos\varphi_1g_1+\dots+a_k\cos\varphi_kg_k$ является проекцией вектора $f=a_1f_1+\dots+a_kf_k$ на подпространство Q. Поэтому

$$\langle f,Q\rangle=\langle f,\widetilde{f}\rangle=\arccos\sqrt{\frac{a_1^2\cos^2\varphi_1+\dots+a_k^2\cos^2\varphi_k}{a_1^2+\dots+a_k^2}},$$

и максимальный угол $\langle P,Q\rangle_k$ равен максимуму углов $\langle f,Q\rangle$ по всем ненулевым векторам f из P. Интересен случай, когда $\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_k=\varphi$. В этом случае любой вектор $f\neq 0$ из P образует с Q угол φ. В частности, при $\varphi=\frac{\pi}{2}$ пространства P и Q ортогональны, а при $\varphi=0$ $P\leq Q$.

§ 19. Движения. Характеристики точечных множеств.

Движениями мы называем преобразования, представимые в виде произведения ортогонального преобразования на параллельный перенос. Общий вид движений $F(x)=A(x)+C$, где A – ортогональное преобразование, C – произвольный вектор.

Два точечных множества называются конгруентными, если одно из них переводится в другое движением. Набор чисел, задающий точечное множество с точностью до движений, называется характеристикой этого множества.

Теорема. Две системы точек $x_1,\dots,x_k$ и $y_1,\dots,y_k$ конгруентны, если $\rho(x_i,x_j)=\rho(y_i,y_j)$ для любых $i,j=1,2,\dots,k$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что конгруентны системы векторов

$$f_1=x_1-x_k,\ f_2=x_2-x_k,\ \dots,\ f_{k-1}=x_{k-1}-x_k,\ f_k=0 \qquad (1)$$

и

$$g_1=y_1-y_k,\ g_2=y_2-y_k,\ \dots,\ g_{k-1}=y_{k-1}-y_k,\ g_k=0.$$

по условию $|f_i|=|g_i|$ и $|f_i-f_j|=|g_i-g_j|$ (2)

Отсюда $(f_i,f_j)=(g_i,g_j)$ и конгруентность систем (I) и (2) вытекает из § 14.

§ 20. База и характеристика пары линейных многообразий.

Пусть L и M – два линейных многообразия и пусть $\dim L=k$, $\dim M=k+r$ $(r\geq 0)$. Выберем точки $x_0\in L$ и $y_0\in M$ так, чтобы вектор x_0-y_0 был ортогонален к L и M. Положим $d=|x_0-y_0|=\rho(L,M)$ и рассмотрим углы $\varphi_1\leq\varphi_2\leq\cdots\leq\varphi_k$ между подпространствами $P=L-x_0$ и $Q=M-y_0$. Будет доказано, что набор чисел $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k,d$ и r является характеристикой пары L,M.

Рассмотрим базу $f_1,g_1,f_2,g_2,\dots,f_k,g_k,g_{k+1},\dots,g_{k+r}$ пары подпространств P,Q и положим

$$x_1=x_0+f_1,\ x_2=x_0+f_2,\ \dots,\ x_k=x_0+f_k$$

$$y_1=y_0+g_1,\ y_2=y_0+g_2,\ \dots,\ y_k=y_0+g_k,\ \dots,\ y_{k+r}=y_0+g_{k+r}$$

Набор точек $x_0,y_0,x_1,y_1,\dots,x_k,y_k,y_{k+1},\dots,y_{k+r}$ назовем базой пары линейных многообразий L,M. Ясно, что L – аффинная

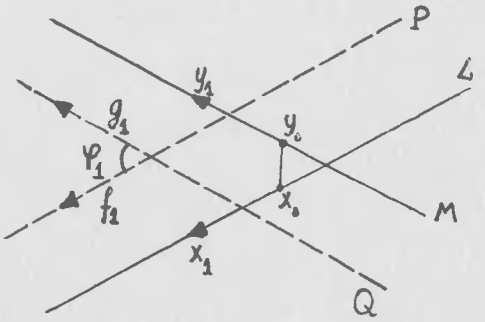
оболочка точек $x_0, x_1, \dots, x_k$, а M – аффинная оболочка точек $y_0, y_1, \dots, y_{k+2}$. Поэтому достаточно показать, что все попарные расстояния между точками базы определяются числами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, d$. Имеем:

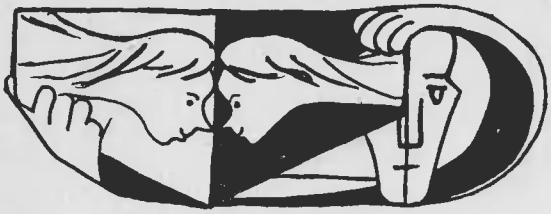
$|x_i - x_0| = 1 \ (1 \le i \le k)$, $|x_i - x_\ell|^2 = 2 \ (1 \le i < \ell \le k)$,

$|y_j - y_0| = 1 \ (1 \le j \le k+2)$, $|y_j - y_m|^2 = 2 \ (1 \le j < m \le k)$,

$|x_0 - y_0| = d$, $|x_i - y_0|^2 = d^2 + 1 \ (1 \le i \le k)$, $|x_0 - y_j|^2 = d^2 + 1 \ (1 \le j \le k+2)$

$|x_i - y_i|^2 = d^2 + 2 - 2\cos\varphi_i \ (1 \le i \le k)$, $|x_i - y_j| = d^2 + 2 \ (1 \le i \le k,\ 1 \le j \le k+2,\ i \ne j)$





Задачи для повторения

I. Для каждого подпространства L_1 линейного пространства L найдется такое подпространство L_2, что $L = L_1 + L_2$

2. Проверить, что четные и нечетные функции образуют подпространства в пространстве C всех непрерывных функций, заданных на $[-1, 1]$. Доказать, что C есть сумма этих подпространств.

3. Вершины треугольника заданы своими радиусами-векторами Z_1, Z_2, Z_3. Доказать, что все три медианы треугольника проходят через точку $\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3}$.

4. В линейном пространстве V заданы две прямые своими параметрическими уравнениями:

$$x(t) = a_0 + b_0 t, \quad y(t) = a_1 + b_1 t$$

Кроме того дана точка c_0. Доказать, что для существования прямой, проходящей через c_0 и пересекающей прямые $x(t)$ и $y(t)$, необходимо, чтобы векторы $a_0 - c_0$, $a_1 - c_1$, b_0, b_1 были линейно зависимы.

5. Доказать, что пересечение всех линейных подпространств, содержащих заданные подпространства P_1 и P_2 есть линейное подпространство $P_1 + P_2$.

6. Доказать, что система двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = 0 \end{cases}$$

определяет в n-мерном арифметическом пространстве подпространство размерности $n-2$ тогда и только тогда, когда по крайней мере один определитель вида $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ $(0 \le i < j \le n)$ отличен от нуля.

Контрольные задачи по теме "Евклидова метрика"

I. Доказать следующие свойства скалярного произведения

а) $(f, cg) = c(f, g)$

б) $(f, g_1+g_2) = (f, g_1)+(f, g_2)$

в) $(f, 0) = 0$

г) если вектор g ортогонален векторам $f_1, f_2, \dots, f_k$, то он ортогонален любой их линейной комбинации.

2. Доказать, что в любом евклидовом пространстве верны следующие утверждения:

а) Для любой пары векторов выполняется тождество

$$|x+y|^2+|x-y|^2 = 2|x|^2+2|y|^2$$

Дать геометрическое истолкование этого тождества.

б) Трехмерный аналог теоремы Пифагора: в прямоугольном параллелепипеде квадрат длины главной диагонали равен сумме квадратов длин его ребер.

в) В равностороннем треугольнике все углы равны 60°.

г) Если у двух треугольников равны стороны, то равны и соответствующие углы.

3. Пусть в линейном пространстве V определены два скалярных произведения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$. Известно, что $(x,x)_1=(x,x)_2$ для любого $x \in V$. Доказать, что для любых x и y $(x, y)_1=(x, y)_2$

4. В пространстве непрерывных функций, заданных на $[0, 2\pi]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ найти длины следующих векторов $f_0=1, f_1=\cos x, f_2=\sin x, \dots, f_{2n-1}=\cos nx$, $f_{2n}=\sin nx$ и попарные углы между ними.

5. Доказать, что формула

$$(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} P\left(\tfrac{i}{n}\right) Q\left(\tfrac{i}{n}\right)$$

задает скалярное произведение в пространстве многочленов степени не выше чем n, определенных на $[0, 1]$.

6. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c, d, чтобы нашлись два вектора f и g, таких, что

$$a=(f,f);\ b=(f,g);\ c=(g,f);\ d=(g,g)$$

7. Пусть векторы $f_1, f_2, \dots f_k$ в n-мерном пространстве имеют длину 1 и образуют попарно равные углы α. Рассмотрим систему векторов $g_1=f_2-f_1, g_2=f_3-f_1, \dots, g_{k-1}=f_k-f_1$

Доказать:

а) $\langle g_i, g_j \rangle = 60^\circ$

б) векторы $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$ независимы.

в) сумма $s = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ ортогональна к каждому из векторов $g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}$.

г) $k \le n+1$ и при $k = n+1$ $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 0$

д) Найти значение α при $k = n+1$

8. Пусть φ – угол между векторами f и g. Доказать, что $\varphi = 0$, тогда и только тогда, когда $f = kg$, $k > 0$ и $\varphi = \pi$ тогда и только тогда, когда $f = kg$, $k < 0$.

9. Доказать, что определитель $\begin{vmatrix} (f,f) & (f,g) \\ (g,f) & (g,g) \end{vmatrix}$ равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах f и g.

10. Пусть a, b, c – векторы эвклидова пространства и $a + b + c = 0$. Доказать, что

$$(a,a)(b,b) - (a,b)^2 = (a,a)(c,c) - (a,c)^2 = (b,b)(c,c) - (b,c)^2$$

11. Если к линейно независимой системе векторов присоединить ненулевой вектор, ортогональный ко всем векторам системы, то полученная система будет линейно независимой.

12. Доказать, что проекции вершин n-мерного куба на его главную диагональ делят ее на n равных частей.

13. В пространстве многочленов степени не выше третьей со скалярным произведением $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x) Q(x) dx$ найти многочлен, ортогональный подпространству многочленов степени не выше второй.

14. В 4-мерном евклидовом пространстве найти ортонормированный базис, содержащий векторы $e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

15. Ортогональным дополнением подпространства L пространства V называется совокупность $L^\perp$ всех векторов из V, ортогональных ко всем векторам из L. Доказать, что

а) $L^\perp$ – линейное подпространство пространства V.

б) $L^\perp \cap L = 0$

в) каждый вектор $f \in V$ однозначно представляется в виде $f = x + y$, где $x \in L$, $y \in L^{\perp}$

г) если L_1 и L_2 два подпространства V, то

$$(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$$

I6. Пусть V – пространство непрерывных функций, заданных на $[-1, +1]$, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

Найти в нем ортогональное дополнение к подпространству четных функций.

I7. Две системы векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ евклидова пространства называются взаимными, если

$$(e_i, f_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Доказать, что если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис, то взаимный базис существует и определен однозначно.

I8. Матрица Грама системы векторов e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Найти проекцию e_3 на линейную оболочку векторов e_1, e_2.

I9. Построить в каком-нибудь евклидовом пространстве систему векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$, для которых $(f_k, f_l) = a^{|k-l|}$, $|a| \leq 1$ $(k, l = 1, 2 \dots n)$. Доказать, что проекция f_n на линейную оболочку векторов $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ пропорциональна f_{n-1} и найти коэффициент пропорциональности.

20.[x)] Доказать "теорему о трех перпендикулярах": каждый вектор x из подпространства L ортогонален к вектору y, тогда и только тогда, когда он ортогонален к проекции вектора y на подпространство L.

2I. Даны четыре вектора в n-мерном евклидовом пространстве. Известно, что первый со вторым, второй с третьим, третий с четвертым и четвертый с первым образуют углы по 120°. Все остальные пары ортогональны. Доказать, что эти четыре вектора линейно зависимы.

x) Задачи 20–22 составляют содержание контрольной работы.

22. Построить в трехмерном арифметическом пространстве ортонормированный базис, включающий вектор $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. (Скалярное произведение определено формулой: $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ если $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$

23. В евклидовом пространстве расстояние от множества M до множества N определяется формулой

$$\rho(M,N)=\inf_{x\in M,\,y\in N}\rho(x,y)$$

Доказать:

а) $\rho(x,M)$ – непрерывная функция аргумента x;

б) $\rho(M,N)=\inf_{x\in M}\rho(x,N)$

24. Пусть $\rho(M,N)=0$. Верно ли, что M и N имеют общую точку? Если M и N замкнуты? Если, кроме того M ограничено?

25. Найти в правильном n-мерном симплексе $x_0x_1\dots x_n$ расстояние между гранями $x_0x_1\dots x_k$ и $x_{k+1}\dots x_n$

26. Пусть L – линейное многообразие и b-ненулевой вектор. Какой вид может иметь функция $f(t)=\rho(bt,L)$?

27. Найти угол между главной диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

28. Найти углы между парами двумерных граней правильного четырехмерного симплекса.

29. Пусть $f_1,\dots,f_k$ – ортонормированный базис подпространства P, $g_1,\dots,g_{k+r}$ – ортонормированный базис подпространства Q. Доказать, что если $\langle f_1,g_1\rangle\le\langle f_2,g_2\rangle\le\dots\le\langle f_k,g_k\rangle$ и $\langle f_i,g_j\rangle=\frac{\pi}{2}$ при $i\neq j$, то i-ый угол между P и Q равен $\langle f_i,g_i\rangle$.

30. Доказать, что если i-ый угол между подпространствами P и Q равен нулю, то $\dim(P\cap Q)\ge i$.

31. Сформулировать в терминах характеристики пары линейных многообразий L, M условия того, что: а) L параллельно M (т.е. $L=M+c$ при некотором c); б) L ортогонально M; в) L пересекается с M и $\dim(L\cap M)=m$; г) L не пересекается с M, но существуют m-мерные многообразия $\widetilde{L}\subseteq L$ и $\widetilde{M}\subseteq M$, такие: что $\widetilde{L}$ параллельно $\widetilde{M}$.

32. Пусть L и M – линейные многообразия в n-мерном пространстве V.

Отрезок $x_0 y_0$ называется общим перпендикуляром к линейным многообразиям L, M, если $x_0 \in L$, $y_0 \in M$ и вектор $x_0 - y_0$ ортогонален к L и M. Доказать, что если $\langle L, M \rangle > 0$ то общий перпендикуляр к L и M определяется однозначно. Если $\langle L, M \rangle_n = 0$, но $\langle L, M \rangle_{n+1} > 0$, то концы общих перпендикуляров образуют пару параллельных m-мерных линейных многообразий $\widetilde{L} \subseteq L$ и $\widetilde{M} \subseteq M$.

33. Пусть P и Q – два подпространства. Обозначим через f^* вектор, который получается, если спроектировать f на P, а затем полученную проекцию спроектировать на Q. Какой должна быть характеристика пары P, Q, чтобы для любого $f \in P$ векторы f^* и f были пропорциональны? Для каких векторов $f \in P$ выполняется равенство $f^* = kf$, если все углы между P и Q попарно различны? Какие значения может иметь коэффициент k?

ЗАДАЧИ НА КОНКУРС

1. Если все попарные углы между векторами тупые, то отбрасывая любой из этих векторов, получим линейно зависимую систему.

Е.Б.Дынкин

2. Описать в n-мерном евклидовом пространстве все (с точностью по конгруентности) системы единичных векторов, обладающие следующими двумя свойствами: 1) любые два вектора системы образуют угол 90^0 или 120^0; 2) система не распадается на две подсистемы, ортогональные друг другу.

Е.Б.Дынкин

3. Доказать, что для любых двух линейных многообразий L и M в n-мерном евклидовом пространстве найдутся точки $x_0 \in L, y_0 \in M$, такие, что $\rho(L, M) = \rho(x_0, y_0)$

4. Даны M_1 и M_2 – два подпространства n-мерного евклидова пространства, такие, что $M_1 \cap M_2 = 0$. Пусть S_i совокупность векторов единичной длины подпространства M_i и пусть $c = \rho(S_1, S_2)$. Доказать, что если $z = x + y$, где $x \in M_1$, $y \in M_2$ то $|x| \le \frac{\sqrt{2}}{c}|z|$; $|y| \le \frac{\sqrt{2}}{c}|z|$

М.А.Шубин.

5. Пусть каждому подпространству P n-мерного пространства V соответствует другое подпространство P^*, причем если $P_1 \subset P_2$, то $P_2^* \subset P_1^*$ (включения строгие). Доказать, что

$$\dim P + \dim P^* = n$$

Б.В. Григорьев.

6. Дана характеристика пары подпространств n-мерного пространства. Вычислить характеристику их ортогональных дополнений.

Ф.А. Богомолов.

7. Шаром радиуса r с центром в точке x_0 называется множество точек x, таких, что $|x - x_0| \leq r$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что в единичный шар N-мерного евклидова пространства можно поместить три шара радиуса $\frac{1}{2} - \varepsilon$

А. К. Толпыго.

Э. Б. ВИНБЕРГ

Лекции для девятых классов.

Ниже приводится краткое изложение лекций, а также контрольные задачи для подготовки к зачету и задачи на конкурс.

Кроме лекционного материала, для сдачи зачета нужно знать элементарную теорию цепных дробей, которая рассказывалась на семинарских занятиях, и уметь решать задачи типа приведенных ниже контрольных задач.

Решения конкурсных задач подаются в письменном виде руководителям семинарских занятий не позднее 14 октября. При рассмотрении конкурсных работ будет учитываться стиль изложения.

Литература для дополнительного чтения:

1. Энциклопедия элементарной математики, книга первая (Арифметика), Гостехиздат, 1951 (статьи А.Я.Хинчина и И.В. Проскурякова).

2. Е.Б.Дынкин и В.А. Успенский. Математические беседы. Гостехиздат, 1952 (раздел второй).

3. В.Серпинский. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Физматгиз, 1963.

4. Э.Трост. Простые числа. Физматгиз, 1959.

5. И.М.Виноградов. Основы теории чисел. Гостехиздат, 1953.

6. Сборник задач Московских математических олимпиад. "Просвещение", 1965.

7. А.П.Киселев. "Арифметика" для 5-6 классов.

Лекции по теории чисел

§ I.

Рассмотрим уравнение $mx+ny=k$ (I)
где m,n,k – целые числа, $m,n\geq 0$ Будем искать решения этого уравнения в целых числах. Пусть $m\geq n>0$
Перепишем (I) в виде $(m-n)x+n(x+y)=k$
и введем обозначения

$$m_1=m-n\ ;\ n_1=n\ ;\ x_1=x\ ;\ y_1=x+y$$

Уравнение (I) сведется тогда к более простому уравнению того же типа:

$$m_1x_1+n_1y_1=k \qquad (2)$$

Снова сравнивая, какое из этих чисел больше, этот прием можно повторять до тех пор, пока один из коэффициентов не обратится в 0 . Допустим, что обратится в 0 второй коэффициент. Тогда уравнение примет вид

$$d\cdot x_s+0\cdot y_s=k \qquad (3)$$

где d – некоторое число, зависящее от m и n , а x_s, y_s – неизвестные, определенным образом связанные с x,y.

Для того, чтобы уравнение (3), а, значит, и уравнение (I), имело решение в целых числах, необходимо и достаточно, чтобы k делилось на d .

Что же это за число d ? Если взять в качестве k число m , то получится уравнение $mx+ny=m$, имеющее решение в целых числах: например, $x=1$, $y=0$. Значит, m делится на d . Также доказывается, что n делится на d . Таким образом, d – общий делитель m и n . Теперь рассмотрим уравнение $mx+ny=d$. Оно должно иметь решение в целых числах, так как d делится на d . Значит, d можно представить в виде $mu+nv$, где u и v – целые числа. Из этого представления видно, что d делится на любой общий делитель m и n . Следовательно, d есть ни что иное, как н.о.д. m и n . Будем обозначать это так:

$$d=(m,n) \qquad (4)$$

Попутно мы нашли способ для вычисления d, не использующий разложения на простые множители. Этот способ называется алгоритмом Евклида и состоит в многократном повторении одного и того же приема: вычитания из большего числа меньшего. Практически несколько последовательных вычитаний одного и того же числа заменяют делением с остатком).

ТЕОРЕМА I. (Уже доказана). Для того, чтобы уравнение(I) имело решение в целых числах, необходимо и достаточно, чтобы k делилось на наибольший общий делитель m и n.

ТЕОРЕМА 2. (Доказывается с помощью теоремы I). Если произведение ab делится на простое число p, то a или b делится на p.

ТЕОРЕМА 3. (Легко выводится из теоремы 2). Каждое натуральное число единственным образом разлагается на простые множители.

§ 2.

В математике большую роль играют различные "операции", вроде арифметических операций, но производимые не обязательно над числами. Эти операции могут называться "сложением" или "умножением", если они обладают некоторыми свойствами обычного сложения или умножения чисел.

Определение. Множество M с операциями сложения $a,b \longrightarrow a+b$ и умножения $a,b \longrightarrow ab$ называется кольцом, если для любых элементов a,b,c этого множества выполняются следующие условия:

[С1] $a+b=b+a$;

[С2] $a+(b+c)=(a+b)+c$

[С3] уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение (обозначаемое $b-a$);

[У1] $ab=ba$;

[У2] $a(bc)=(ab)c$

[УС] $a(b+c)=ab+ac$

Из этих свойств операций в кольце могут быть выведены и другие, например: $a(b-c)=ab-ac$

Во всяком кольце существует такой элемент 0 ("нуль"), что

$$a+0=a \qquad \text{для всех } a \qquad (5)$$

Определение. Кольцо M называется полем, если уравнение $ax=b$ имеет единственное решение (обозначаемое $\frac{b}{a}$) при любом b и любом $a\neq 0$. [У3]

Во всяком поле существует такой элемент 1 ("единица"), что

$$a\cdot 1=a \qquad \text{для всех } a. \qquad (6)$$

При обычных операциях сложения и умножения натуральные числа не образуют кольца, так как не выполняется (С3); целые числа образуют кольцо, но не поле; рациональные числа, а также все действительные числе, образуют поле.

Примером кольца, состоящего не из чисел, является кольцо вычетов по модулю n.

Вычетом по модулю n называется класс целых чисел, дающих при делении на n один и тот же остаток. Вычет по модулю n, содержащий a, обозначается $a \bmod n$. Например,

$$3 \bmod 2 = \{\ldots,-5,-3,-1,1,3,\ldots\}$$

Очевидно, что $a \bmod n = a' \bmod n$ тогда и только тогда, когда $a-a'$ делится на n.

Имеется всего n вычетов по модулю n (столько, сколько возможно различных остатков при делении на n).

Сложение и умножение вычетов определяется по формулам

$$a \bmod n + b \bmod n = (a+b) \bmod n,$$
$$(a \bmod n)(b \bmod n) = (ab) \bmod n.$$

При этом нужно обязательно доказать, что вычеты, стоящие в правых частях этих равенств, не изменятся, если a и b заменить на a' и b', дающие те же остатки при делении на n.

§ 3.

Некоторые привычные свойства сложения и умножения чисел не выполняются в произвольных кольцах и полях. Например, ненулевой элемент, сложенный сам с собой, может дать нуль ($1+1=0$ в поле вычетов по модулю 2); произведение двух ненулевых элементов может равняться нулю ($(2 \bmod 6)(3 \bmod 6)=0$ в кольце вычетов по модулю 6).

Поэтому заслуживают внимания такие теоремы: в любом кольце

$$a \cdot 0 = 0 \text{ для всех } a \; ; \qquad (7)$$

в любом поле

из $ab = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$ (8)

ТЕОРЕМА 4. Кольцо, обладающее свойством (8) и состоящее из конечного числа элементов, является полем.

Следствие. (Вытекает из теоремы 4 и теоремы 2). Кольцо вычетов по модулю простого числа является полем.

ТЕОРЕМА 5. В поле, состоящем из n элементов,

$$a^{n-1} = 1 \qquad \text{для любого } a \neq 0 \qquad (9)$$

Следствие. (Малая теорема Ферма). Если p – простое число и a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p.

Пусть F – поле, состоящее из n элементов. Возьмем в этом поле какой-нибудь отличный от нуля элемент a и рассмотрим его степени

$$a, a^2, a^3, \ldots \qquad (10)$$

Наименьшее k, для которого $a^k = 1$, называется порядком элемента a. Так как $a^{m+k} = a^m a^k = a^m$, то последовательность (10) периодическая с периодом k. Если $a^m = 1$, то m делится на k.

Лемма 1. (Вытекает из теоремы 5). Порядок любого элемента поля F является делителем $n-1$.

Лемма 2. Если порядок a равен $k \cdot s$, то порядок a^s равен k.

Лемма 3. Пусть порядок a равен k, порядок b равен l, причем $(k, l) = 1$. Тогда порядок ab равен kl.

ТЕОРЕМА 6. В поле F, состоящем из n элементов, существует хотя бы один элемент, порядок которого равен $n-1$ (Такой элемент называется первообразным корнем).

Доказательство. Разложим $n-1$ на простые множители:

$$n-1 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$$

Если существует элемент, порядок которого делится на $p_1^{k_1}$, то по лемме 2 существует элемент порядка $p_1^{k_1}$. Если существуют элементы порядков $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_s^{k_s}$, то по лемме 3 существует элемент порядка $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, т.е. $n-1$. Остается предположить, что для некоторого i не существует элемента, порядок которого делится на $p_i^{k_i}$. Тогда порядки всех элементов являются делителями числа $m = \frac{n-1}{p_i}$ и, следовательно, $a^m = 1$ для всех $a \neq 0$. Покажем, что это невозможно.

Рассмотрим многочлен

$$f(x) = x^m - 1$$

Возьмем какой-нибудь элемент $a \neq 0$ из нашего поля и разделим $f(x)$ с остатком на $x-a$:

$$f(x) = g(x)(x-a) + r \qquad (11)$$

(Здесь $g(x)$ – многочлен с коэффициентом из поля F, а r – элемент поля F). Если подставить в (11) $x = a$, то получится, что $r = 0$. Таким образом,

$$f(x) = g(x)(x-a) \qquad (12)$$

Пусть $b \neq 0, a$. Тогда из (12) находим, что $g(b) = 0$. Рассуждая так же, как и раньше, получим, что $g(x)$ делится без остатка на $x-b$:

$$g(x) = h(x)(x-b)$$

Продолжая деление дальше, получим в конце концов

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-c)\varphi(x)$$

где $a, b, \dots, e$ – все элементы поля F, кроме нуля. Однако такое равенство невозможно, так как слева стоит многочлен степени $m < n-1$, а справа – многочлен степени $\geq n-1$. Тем самым теорема доказана.

Пример. В поле вычетов по модулю 79 первообразным корнем является, например, вычет $3 \bmod 79$. Обозначим его через a. Каждый вычет $c \neq 0$ может быть представлен в виде

$$c = a^k$$

где $0 \leq k \leq 77$ $(a^{78} = a^0 = 1)$. Число k называется индексом вычета c. Пользуясь таблицами индексов, можно, без труда вычислить, например, $(36 \bmod 79)^{100}$

Находим, что индекс вычета $36 \bmod 79$ равен 10, т.е.

$$36 \bmod 79 = (3 \bmod 79)^{10}$$

Следовательно,

$$(36 \bmod 79)^{100} = (3 \bmod 79)^{1000} =$$
$$= (3 \bmod 79)^{78 \cdot 12 + 64} = (3 \bmod 79)^{64}$$

Пользуясь теми же таблицами, находим по индексу 64 вычет $45 \bmod 79$. Это и будет ответ. Таблицы индексов (не только для 79, но и для других простых чисел) имеются, например, в книге И.М.Виноградова "Основы теории чисел").

§ 4.

Рассмотрим вопрос об извлечении квадратных корней в поле вычетов по модулю p, где p – простое число, не равное 2. Пусть a – первообразный корень. Если $c = a^k$, то $c^2 = a^{2k}$. Отсюда ясно, что извлечение корня возможно из тех и только тех вычетов, индекс которых четен. Таким образом, имеется $\frac{p-1}{2}$.

вычетов (не считая нуля)

$$a^0 = 1, a^2, a^4, \ldots, a^{p-3}$$

из которых возможно извлечение квадратного корня, и столько же вычетов

$$a, a^3, a^5, \ldots, a^{p-2}$$

для которых это невозможно. Первые называются <u>квадратичными вычетами</u> по модулю p.

<u>Лемма I.</u> Вычет c по модулю p тогда и только тогда является квадратичным, когда $c^{\frac{p-1}{2}} = 1$

<u>Доказательство.</u> Если c – квадратичный вычет, то $c = a^{2k}$ и $c^{\frac{p-1}{2}} = a^{k(p-1)} = 1$. Если c не является квадратичным вычетом, то $c = a^{2k+1}$ и

$$c^{\frac{p-1}{2}} = a^{k(p-1)+\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \neq 1$$

ТЕОРЕМА 7. (Вытекает из леммы I). Для того, чтобы вычет $(-1) \bmod p$ был квадратичным, необходимо и достаточно, чтобы p имело вид $4k+1$

ТЕОРЕМА 8. (Теорема Ферма). Нечетное простое число можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда p имеет вид $4k+1$.

Доказательство. Пусть $p = a^2 + b^2$. Тогда $\left(\frac{a \bmod p}{b \bmod p}\right)^2 = (-1) \bmod p$ и по теореме 7 должно иметь вид

Пусть теперь $p = 4k+1$. По теореме 7 существует такое целое число u, что $(u \bmod p)^2 = (-1) \bmod p$ Для любых целых чисел x, y :

$$x^2 + y^2 = x^2 - u^2 y^2 = (x+uy)(x-uy) \bmod p \qquad (13)$$

В выражении $x+uy$ будем придавать x и y всевозможные целые неотрицательные значения, меньше, чем $\sqrt{p}$. Мы получим больше, чем p чисел. Поэтому среди этих чисел найдутся два, дающие один и тот же остаток при делении на p

$$x_1 + u y_1 = x_2 + u y_2 \bmod p$$

Пусть для определенности $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$. Положим $a = x_1 - x_2$, $b = y_1 - y_2$ Тогда $a + ub$ делится на p . Из (13) следует, что $a^2 + b^2$ также делится на p . Но $a < \sqrt{p}$, $b < \sqrt{p}$, так что $a^2 + b^2 < 2p$. Остается единственная возможность: $a^2 + b^2 = p$ Аналогично разбирается случай, когда $x_1 > x_2$, $y_1 < y_2$ Теорема доказана.

§ 5.

На клетчатой бумаге нарисуем окружность радиуса r с центром в одном из узлов сетки. Площадь, ограниченная этой окружностью, равна приближенно числу находящихся внутри нее узлов сетки. Обозначим это число через $f(r)$. Тогда $\pi \approx \frac{f(r)}{r^2}$, причем точность этой формулы тем выше, чем больше r .

Число $f(r)$ может быть найдено так: для каждого $n < r^2$ найдем число способов представления n в виде суммы квад-

ратов двух целых чисел (это будет число узлов сетки на концентрической окружности радиуса $\sqrt{n}$ и все эти числа сложим. О числе представлений n в виде суммы двух квадратов см. конкурсную задачу № I; остальное см. в книге Д.Гильберта и С.Кон-Фоссена "Наглядная геометрия", гл. П, § 6.

Таким путем получается следующая формула для π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

(так называемый ряд Лейбница).

Содержание § 5 для сдачи зачета знать не требуется.

Контрольные задачи.

I. Доказать, что $(2^m-1, 2^n-1) = 2^{(m,n)}-1$

2. Найти все решения в целых числах уравнения
$$15x - 9y = 6$$

3. Найти все решения в целых неотрицательных числах уравнения
$$3x+5y=100$$

4. Найти все целые числа, которые при делении на 3 дают в остатке I, на 7-6 и на II-6.

5. (Китайская теорема об остатках).
Пусть даны натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_s$ и пусть
$0 \le r_1 < n_1$, $0 \le r_2 < n_2, \dots, 0 \le r_s < n_s$
Для того, чтобы существовало число, дающее при делении на n_1 остаток r_1, при делении на n_2 остаток r_2 и т.д., необходимо и достаточно, чтобы $r_i - r_j$ делилось на (n_i, n_j) при всех i, j.

6. Доказать, что если ab делится на c и $(b,c)=1$, то a делится на c.

7. Доказать, что если a делится на b и c порознь и $(b,c)=1$, то a делится на bc.

8. Доказать, что наименьшее общее кратное чисел a и b равно $\frac{ab}{(a,b)}$.

9. Найти число всех делителей числа $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7$

I0. Числа a и b взаимно просты. Что можно сказать о $(a+b, a-b)$?

II. Доказать, что при любом n между n и $n!$ найдется простое число.

I2. Доказать, что простых чисел вида $4k+3$ бесконечно много.

I3. Пусть n – некоторое натуральное число. Доказать, что наименьшее из натуральных чисел, взаимно простых с каждым из чисел I,2 ..., n – простое.

I4. Обозначим через q_n знаменатель n-ой подходящей дроби цепной дроби $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$.

Доказать, что

$$a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \ldots + \frac{1}{a_0}} = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

I5. Доказать, что $q_n \geqslant 2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ (через $\left[\frac{n}{2}\right]$ обозначается целая часть $\frac{n}{2}$).

I6. Разложить $\frac{I620}{7II}$ в цепную дробь и вычислить последовательные подходящие дроби.

I7. Выразить через радикалы число

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \ldots}}}}$$

I8. Найти с точностью до 0,0I решение уравнения $2^x = 3$.

I9. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ при всяком целом $n > 2$ делится на I20.

20. Доказать, что число при делится на I9.

2I. Доказать, что для любого простого числа p отличного от 2 и 5 найдется число, записываемое одними единицами, которое делится на p.

22. Сколько решений имеет уравнение $6x = 2$ в кольце вычетов по модулю 80?

23. Найти $7^{I000} \bmod 37$.

24. Доказать, что если a – первообразный корень в поле вычетов по модулю p, то a^k будет первообразным корнем тогда и только тогда, когда $(k, p-1) = 1$.

25. Сколько элементов a имеется в поле вычетов по модулю 97, для которых уравнение $x^3 = a$ имеет решение? То же для поля вычетов по модулю I0I.

Конкурсные задачи

1. На клетчатой бумаге нарисуем окружность радиуса $\sqrt{n}$ с центром в одном из узлов сетки. Число узлов сетки, которые попадут на эту окружность, обозначим через c_n. Доказать, что c_n равно учетверенной разности между числом всех делителей n вида $4k+1$ и числом всех делителей n вида $4k+3$.
2. Доказать, что равенство $a^4+b^4=c^4$ невозможно ни при каких натуральных a, b, c.
3. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 1$ в кольце вычетов по модулю n?
4. Найти $11^{17^{17}} \bmod 71$.
5. Доказать, что всякое простое число вида $20k+1$ можно представить в виде a^2+5b^2, где a и b – целые числа.
6. а) Построить поле из 4 элементов;
   б) Доказать, что не существует поля из 6 элементов.

К задаче 1

а) $c_n=0$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из простых множителей вида $4k+3$ входит в n в нечетной степени;

б) если все простые множители вида $4k+3$ входят в четных степенях, а простые множители вида $4k+1$ входят в степенях $k_1, k_2, \dots, k_s$, то $c_n = 4(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_s+1)$.

И. Д. НОВИКОВ.

Комбинаторика и элементы теории вероятностей в 8 классах.

1. Сколько существует всевозможных "слов" состоящих из 5 букв (сочетания вагон, ыыйач, аааaa, ыыыы считаются словами)?

2. Каким будет ответ в первой задаче, если учесть, что слова не могут начинаться с ь и й?
3. Сколько существует "олов" (всюду мы имеем в виду буквы русского алфавита) состоящих из пяти букв и содержащих хотя бы I раз букву "а"?
4. Сколько можно составить слов из трех букв так, что ни одна буква не повторяется (например: лес, ыый - можно, а оно, ььь - нельзя)?
5. Сколько слов можно составить из букв слова "рыбак", располагая их в различном порядке?
6. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости, на гранях которой нарисованы числа I, 2, 3, 4, 5, 6 выпадает число n:
   а/ $n \leq 3$; в/ $n > 3$; с/ $n > K$ (n всегда > 0)?
7. Какова вероятность того, что при двух бросаниях игральной кости выпадает число n: а) $n \leq 6$, в) $n > 6$, с) $n > 11$?
8. Какова вероятность того, что в "слове" из 5 букв все буквы разные (в алфавите 33 буквы, разрешены любые слова)?
9. Какова вероятность того, что в группе из пяти человек дни рождения хотя бы у двоих совпадают (в году 365 дней)?
10. Какова вероятность того, что рассаживая наугад 5 мальчиков и 5 девочек за круглым столом, мы посадили их через одного?

Обозначения: C_n^k - число сочетаний из n по k
A_n^k - число размещений из n по k
P_n - число перестановок из n элементов.

11. Используя определение C_n^k, A_n^k, P_n доказать следующие соотношения:
   1) $P_{n+1} = (n+1)P_n$,
   2) $A_n^k = P_k C_n^k$,
   3) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$,
   4) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-2} + \ldots + C_{n-k+1}^0$,
   5) $A_n^k = k A_{n-1}^{k-1} + A_{n-1}^k$.

I2. Используя соотношения I, 2, 3 задачи № II доказать формулы
а) $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$, в) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; с) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

I3. Сколькими способами можно разрезать бусы, состоящие из n попарно различных звеньев на k частей (резать можно только между звеньев)?

I4. Какова вероятность того, что при случайном распределении 50 различных предметов по I0 занумерованным ящикам в I-м ящике окажется ровно I0 предметов?

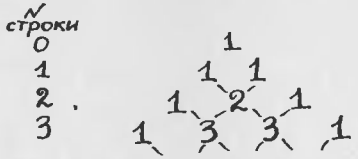
I5. Какова вероятность того, что расставленные на шахматной доске 8 коней не бьют друг друга?

I6. Доказать равенство $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

I7. Сколькими путями можно пройти из левого нижнего угла шахматной доски 8 х 8 клеток, в верхний правый угол, если можно двигаться по клеткам только вправо и вверх?

I8. Сколькими способами можно разбить натуральное число " " на сумму К неотрицательных слагаемых, (2 разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

I9. Доказать, что в "треугольнике Паскаля", в котором каждое число равно сумме 2-х чисел, стоящих над ним, сумма чисел, стоящих в n -ой строке равна 2^n



20. Доказать, что число, стоящее на "К" - том месте в "n-ой" строке "треугольника Паскаля" равняется C_n^k . (нумерация строк и чисел в строке начинается с нуля).

2I. Доказать, что число стоящее в n-ой строке "треугольника Паскаля" на К-ом месте равно коэффициенту при X^k в разложении $(1+X)^k$ по возрастающим степеням X.

22. Доказать, что коэффициент при $x^k y^e$ в разложении $(1+x+y)^n$ равен $C_n^k C_{n-k}^e$ $(k+e \leq n)$

23. Найти сумму коэффициентов многочлена $(2x^3-3x^2+2x-1)^{1965}$

24. Доказать, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^4 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

25. Найти сумму $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + C_n^2 C_m^{k-2} + \ldots + C_m^k C_m^0$.

26. Найти сумму $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots (C_n^n)^2$.

27. Доказать, что в разложении $(1+x)^n$ при $n = 2^k - 1$ все коэффициенты нечетные.

28. Что больше $99^{50} + 100^5$ или 101^{50} ?

29. Сколько членов в разложении $(1+x+y)^n$? .

30. Доказать, что если в разложении $(x+a)^n$ по степеням X коэффициент при X^i не больше коэффициента при X^{i+1}, то коэффициент при X^{i-1} строго меньше коэффициента при X^i . И аналогично, если коэффициент при X^i не меньше чем при X^{i+1} , то коэффициент при X^{i+2} строго меньше коэффициента при X^{i+1}.

31. Найти n , если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэфф. при x^5 в 4^n раза.

32. Найти n , если известно, что в разложении $\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\right)^n$ по убывающим степеням X десятый коэффициент наибольший.

Поток 7 классов

7а: Олег Вячеславович Локуциевский (кандидат ф.-м. наук, ст. научный сотрудник математического института АН СССР)
7в: Лидия Ивановна Головина (кандидат ф.-м. наук, доцент МГУ).

Поток 8 классов

8а, группа I. Евгений Львович Нольде (асп. МГУ).
Рубчинский Александр Анатольевич (МГУ, 3 курс).
группа 2. Бусяцкая Ирина Константиновна (МГУ, 2курс).
Бухенская Светлана Михайловна (МГУ, 2 курс).
8б, группа I. Илья Давидович Новиков (МГУ, 6 курс).
Каток Светлана Борисовна (МГУ, 2 курс).
группа 2. Татьяна Владимировна Соколовская (МГУ, 6 курс).
Михаил Хаймович Розовский (МГУ, 2 курс).
8в: Виктор Иосифович Левин (доктор ф.-м. наук, проф. МГПИ им. В.И.Ленина).

Поток 9 классов

Лекторы: Эрнест Борисович Винберг (кандидат ф.-м. наук, доцент МГУ).
Юрий Иванович Манин (доктор ф.-м. наук, проф. МГУ).
9а: I группа: Леонид Моисеевич Иоффе (МГУ. 5 курс).
Евгений Иосифович Анно (МГУ, 2 курс).
2 группа: Виктор Львович Мазо (МГУ, 4 курс).
Михаил Давидович Шкловер (МГУ, 4 курс).
9б: I группа: Василий Алексеевич Исковских (асп. МГУ).
Татьяна Яковлевна Додзина (МГУ, 2 курс).
Владимир Леонидович Попов (МГУ, 2 курс).
2 группа: Сергей Владимирович Овчинников (МГУ, 5 курс).
Алексей Андреевич Коробов (МГУ, 2 курс).
9в: I группа: Юрий Андреевич Лысенко (МГУ, 3 курс).
Поспелов Алексей Сергеевич (МГУ, 3 курс).
Давид Иосифович Эйделькинд (МГУ, 3 курс).
2 группа: Евгений Михайлович Андреев (МГУ, 4 курс).
Виктор Александрович Жеребцов (МГУ, 2 курс).

Подписано к печати 5/X-65г. Л-49619.
Формат 60x90 1/16. Физ.п.л. 2,75. Зак. 1474. Тир. 1000

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд-ва МГУ.
Москва. Ленгоры.

Поток 10 классов.

Лектор – Евгений Борисович Дынкин (доктор ф–м наук, проф.МГУ).

10а. I группа: Станислав Алексеевич Молчанов (асп. МГУ).
Григорий Александрович Маргулис (МГУ, 4 курс).
Владимир Михайлович Фишман (МГУ, 3 курс).
2 группа: Александр Дмитриевич Вентцель (канд. ф–м наук, асп. МГУ),
Алексей Кириллович Толпыго (МГУ, 3 курс).
Леонид Маркович Наймарк (МГУ, 6 курс).

10б. I группа: Анатолий Борисович Каток (МГУ, 6 курс).
Людмила Юрьевна Шехтман (МГУ, 5 курс).
Федор Алексеевич Богомолов (МГУ, 2 курс).
2 группа: Борис Викторович Григорьев (МГУ, 6 курс).
Михаил Борисович Малютов (асп. МГУ).

10в. I группа: Виктор Григорьевич Кац (МГУ, 6 курс).
Исаак Михайлович Сонин (МГУ, 6 курс).
Владимир Иванович Данилов (МГУ, 5 курс).
2 группа: Михаил Александрович Шубин (МГУ, 5 курс).
Григорий Лазаревич Литвинов (МГУ, 5 курс).
Пьер Давидович Мильман (МГУ, 4 курс).

Уроки математики ведут следующие преподаватели:
Волов Леонид Михайлович (9а,9б,9в,10а, 10б,10в).
Эдко Александра Аркадьевна (7а).
Огамов Артем Артемович (7б).
Сергиенко Неля Абрамовна (8а,8б).

Помимо перечисленных математических классов в школе имеется еще один одиннадцатый и три девятых класса с расширенной программой по математике; преподавание математики в этих классах ведется без участия работников высшей школы.